

# ASINHRONA DEMODULACIJA

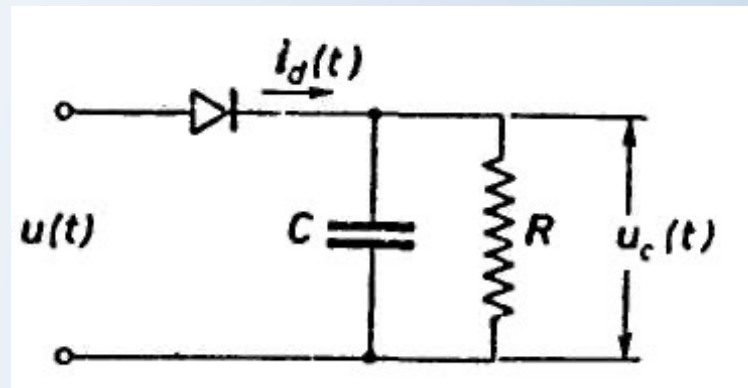
**Demodulacija** - operacija obrnuta modulaciji u kojoj se iz *produkata modulacije* rekonstruiše modulišući signal.

**Detekcija** - reprodukcija modulišućeg signala koja se ostvaruje pomoću asimetrično provodnog sklopa bez upotrebe lokalnog oscilatora.

Detektor anvelope je sklop koji bez upotrebe lokalnog oscilatora na svom izlazu daje signal identičan anvelopi ulaznog signala.

Koristi se za ekstrakciju modulišućeg signala iz KAM signala, za druge vrste AM signala ne može da se koristi.

Detektor anvelope je vrlo jednostavan, realizuje se pomoću diode i RC kola.



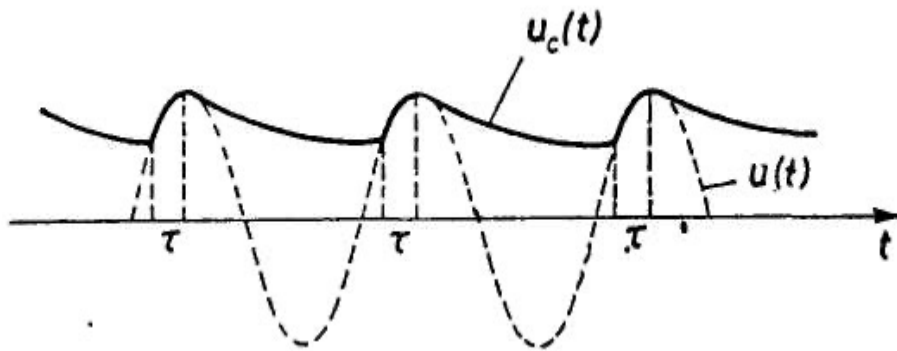
Slika: Detektor anvelope

## Princip rada:

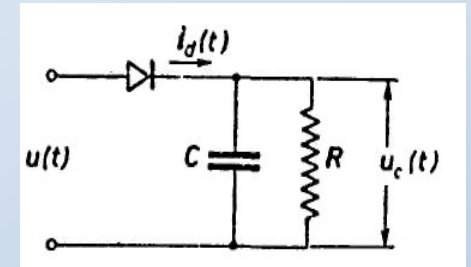
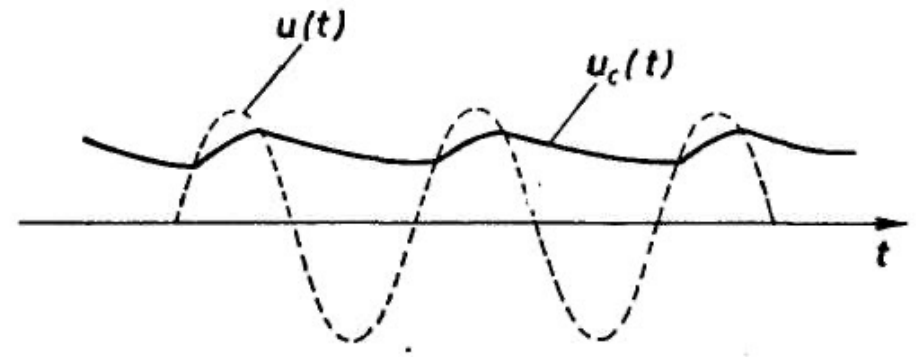
Neka na ulaz detektora anvelope dolazi nemodulisani nosilac i neka je dioda idealna (otpornost u smjeru propuštanja je nula, a u obrnutom smjeru je beskonačno velika). Kada dioda provodi, kondenzator  $C$  se vrlo brzo napuni i napon na njegovim krajevima dostiže maksimalnu vrijednost ulaznog sinusoidalnog napona. Kada dioda ne provodi, kondenzator  $C$  se prazni preko otpornika  $R$ .

Struja diode  $i_d(t)$  postoji samo u vremenskim intervalima  $\tau$ . Talasni oblik napona  $u_c(t)$  zavisi od vremenske konstante  $RC$ . Što je ona veća, to je  $u_c(t)$  bliži maksimalnoj vrijednosti  $U_0$  napona  $u(t)=U_0\cos\omega_0 t$ . Zato se ovaj sklop još naziva i **vršni detektor**.

a)

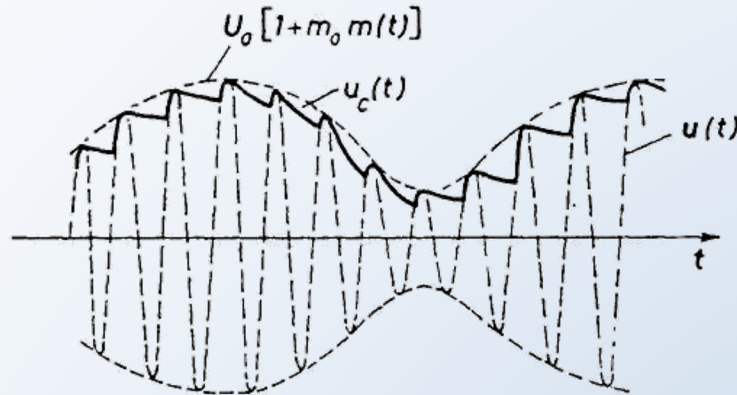


b)



Slika: Sinusoidalan napon  $u(t)$  na ulazu u detektor anvelope i napon  $u_c(t)$  na krajevima kondenzatora  $C$ , a) uz uslov da je dioda idealna, b) u slučaju kad dioda nije idealna

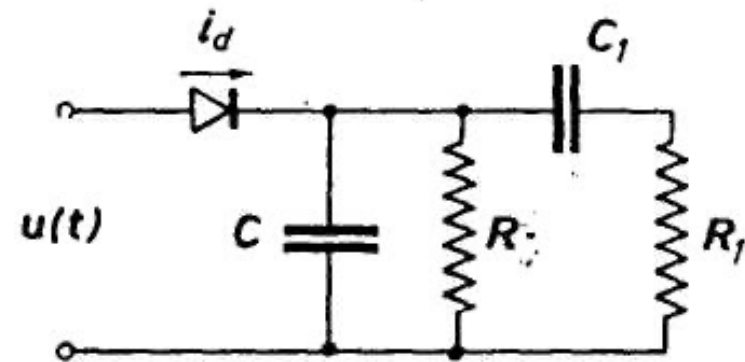
Kada na ulaz detektora dolazi amplitudski modulisan signal tipa KAM, odvijaće se isti proces, samo se sada mijenja amplituda ulaznog signala. Uz uslov da je vremenska konstanta  $RC$  povoljno izabrana, napon  $u_c(t)$  će se mijenjati tako da prati ove promjene.



*Slika: Amplitudski modulisan signal tipa KAM (isprekidano izvučena kriva) i detektovani napon  $u_c(t)$  (puno izvučena kriva)*

Izlazni napon prati anvelopu signala sa malim promjenama. Upotrebom jednostavnog  $RC$  filtra, nepoželjne komponente mogu da se odstrane, tako da se na krajevima otpornika  $R_1$  dobija željeni detektovani napon.

Uslov: učestanost nosioca  $\omega_0$  mora da bude mnogo veća od učestanosti  $\omega_M$  kojom je ograničen spektar modulišućeg signala.



*Slika: Detektor anvelope sa jednostavnim filtarskim kolom  $R_1C_1$*

## Analiza rada detektora anvelope:

Pretpostavimo da je  $\omega_0 \gg \omega_M$ . Tada se u prvoj aproksimaciji može smatrati da kroz otpornik  $R$  protiče korisna komponenta struje diode superponirana komponenti konstantnog intenziteta, a kroz kondenzator  $C$  sve one komponente koje imaju visoku učestanost.

Da bismo izveli željenu analizu posmatrajmo prvo slučaj kada se na ulaz detektora dovodi nemodulisani nosilac.

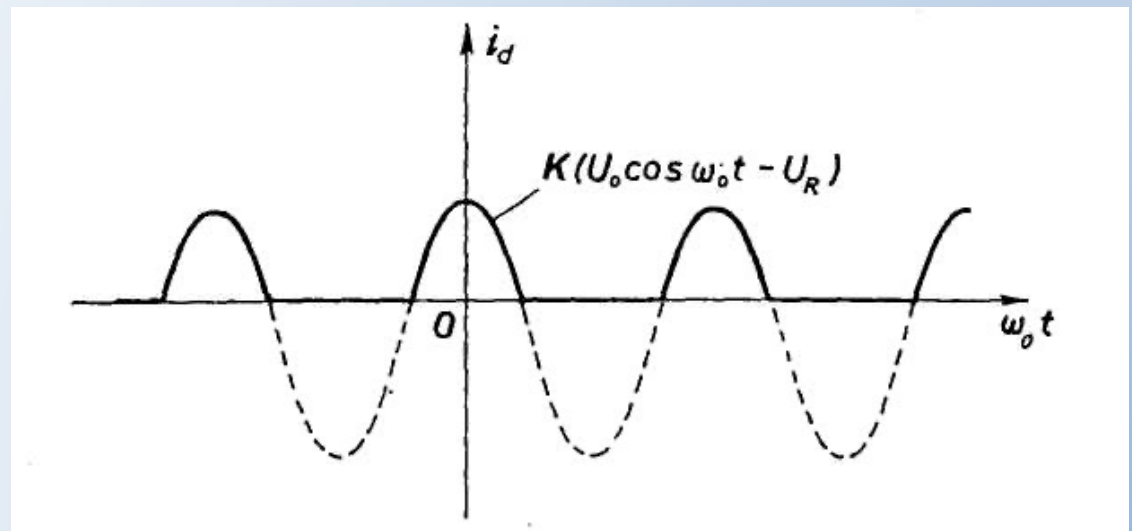
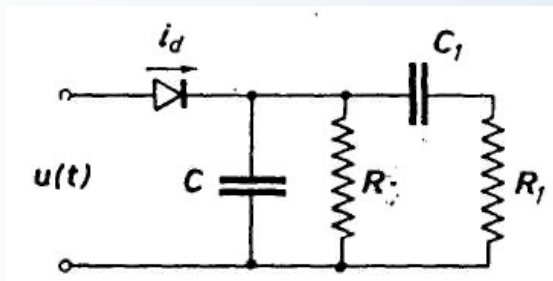
Za  $u_d(t) > 0$  dioda provodi, pa je struja kroz diodu  $i_d(t) = u_d(t)/R_d$ .

$$i_d(t) = \frac{1}{R_d} (U_0 \cos \omega_0 t - U_R)$$

Za  $u_d(t) < 0$  dioda ne provodi, pa je struja kroz diodu  $i_d(t) = 0$ .

Struja  $i_d(t)$  je prikazana puno izvučenom linijom na slici. Postoji kada je ispunjen uslov:

$$\cos \omega_0 t > \frac{U_R}{U_0}$$



Pošto je struja kroz diodu periodična, može se predstaviti u obliku Fourier-ovog reda:

$$i_d = i_d(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$a_0/2 = I_0$  predstavlja konstantnu (jednosmjernu komponentu) struju diode:

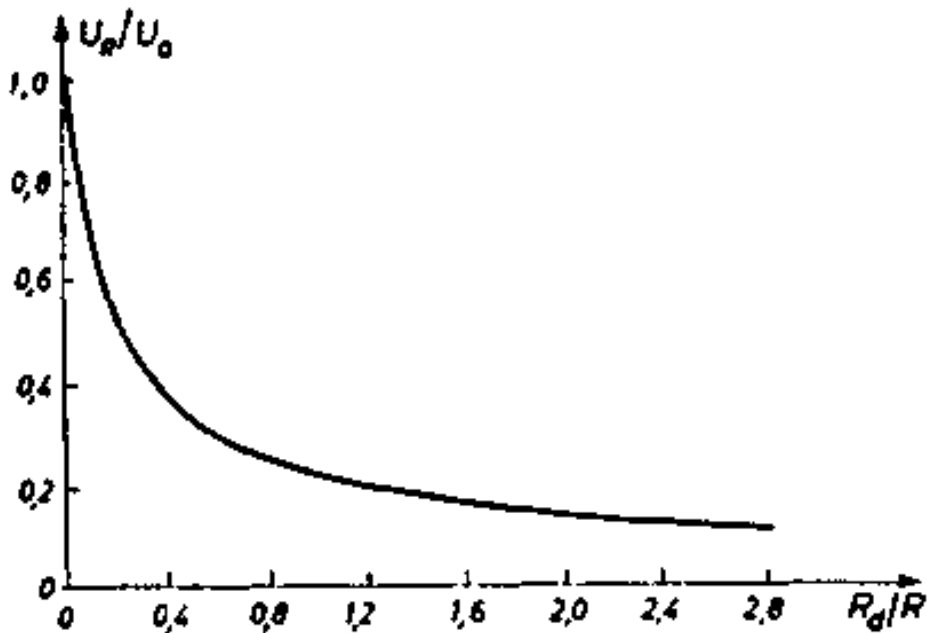
$$\begin{aligned} I_0 = \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} i_d(t) dt = \frac{K}{\pi} \int_0^{\arccos U_R/U_0} (U_0 \cos \omega_0 t - U_R) d\omega_0 t = \\ &= \frac{K}{\pi} \left[ (U_0^2 - U_R^2)^{\frac{1}{2}} - U_R \arccos \frac{U_R}{U_0} \right] \end{aligned}$$

Pošto je  $U_R = RI_0$ , biće:

$$U_R = \frac{KR}{\pi} \left[ (U_0^2 - U_R^2)^{\frac{1}{2}} - U_R \arccos \frac{U_R}{U_0} \right], \quad K=1/R_d$$

Odnosno:

$$\frac{\pi R_d}{R} = \sqrt{\left(\frac{U_0}{U_R}\right)^2 - 1} - \arccos \frac{U_R}{U_0}$$



*Slika: Izlazni napon detektora anvelope u funkciji odnosa otpornosti diode u smjeru propuštanja  $R_d$  i otpornosti opterećenja  $R$*

$U_R/U_0 \rightarrow 1$  kada  $R_d/R \rightarrow 0$ , tj. kada je otpornost diode u smjeru propuštanja veoma mala u odnosu na otpornost opterećenja. U tom režimu je dakle napon na ovom otporniku  $R$  vrlo približno jednak naponu  $U_0$ .

Ako se govori o KAM signalu, u izrazu za anvelopu umjesto  $U_0$  figuriše izraz  $U_0 + U_0 m_0 m(t)$ , pa će se na otporniku  $R$  dobiti napon čije su promjene vrlo približno jednake modulišućem signalu  $U_0 m_0 m(t)$ .

Uloga nosioca je jasna. Konstanta  $U_0$  u izrazu za amplitudu KAM signala obezbjeđuje da anvelopa modulisanog signala nikad ne mijenja znak. Taj uslov omogućuje da se na otporniku  $R$  dobije napon identičan anvelopi modulisanog signala.

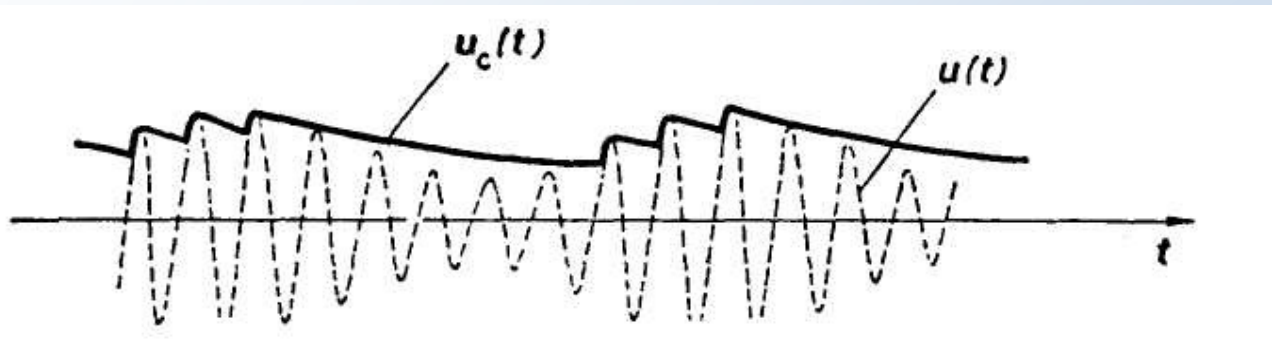


Odstupanja od idealnog slučaja:

1. Dijagonalno odsijecanje
2. Odsijecanje negativnih vrhova

1. Javlja se u slučaju kada RC konstanta nije dobro izabrana. Ako je vrijednost ove konstante suviše velika, kondenzator ne može dovoljno brzo da se isprazni kroz otpornik R, pa napon na njemu ne slijedi tok anvelope ulaznog modulisanog signala, tj. izlazni detektovani signal postaje izobličen.

Ova pojava se naziva **dijagonalno odsijecanje**.

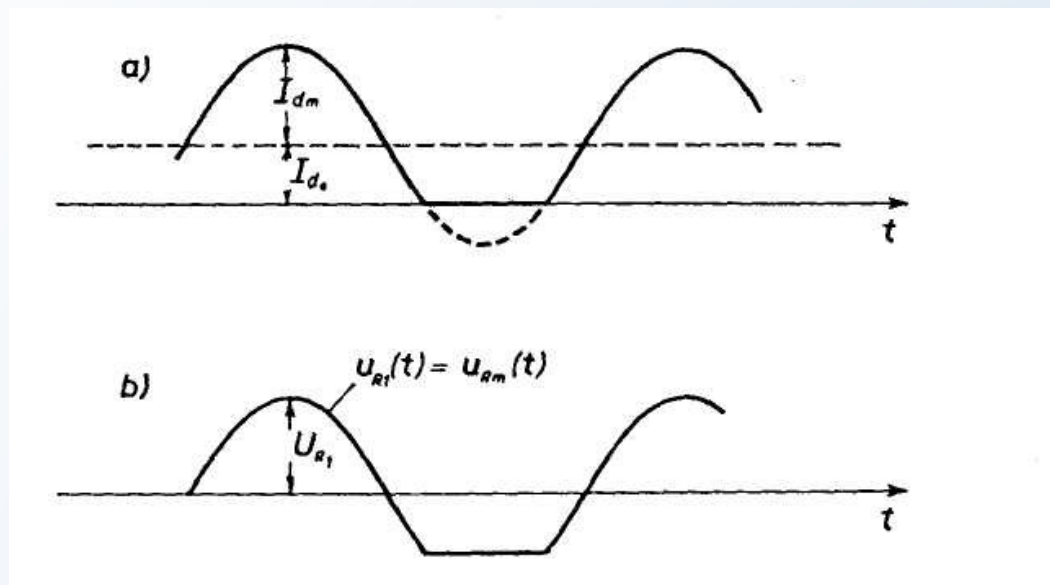


*Slika: Talasni oblik detektovanog signala sa dijagonalnim odsijecanjem izazvanim suviše velikom RC konstantom u kolu detektora anvelope*

Da bi se izbjegla ova neželjena pojava, RC treba izabrati tako da je:

$$RC \leq \frac{1}{\omega_m} \sqrt{\frac{1}{m_0^2} - 1}$$

2. Druga vrsta izobličenja do koje može da dođe u detektoru anvelope je ***odsijecanje negativnih vrhova***.



Da ne bi došlo do ove vrste izobličenja, mora da se zadovolji uslov da je:

$$m_0 \leq \frac{|Z|}{R}$$

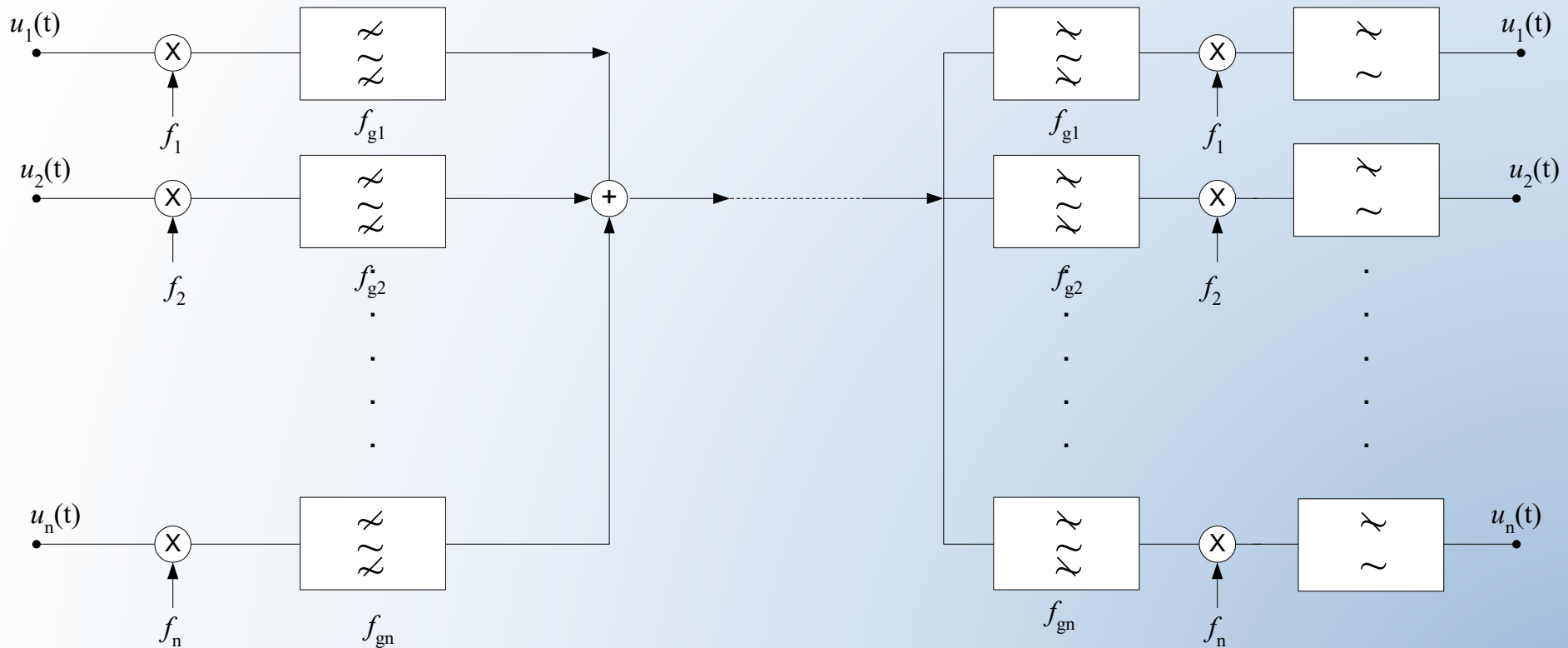


## ✓ Zaključak:

- Za AM-2BO signale, modulatori su balansni, realizuju se pomoću nelinearnih ili prekidačkih sklopova
- Za AM-1BO signale koriste se:
  - odgovarajući modulatori koji na svom izlazu daju samo jedan bočni opseg
  - modulatori AM-2BO signala u kombinaciji sa filtrom
- Za AM-NBO modulatori su:
  - produktni modulator i filter
  - odgovarajuća šema modulatora koji na svom izlazu daje signal sa nejednakim bočnim opsezima
- Za KAM signale, modulator je produktni
- Demodulacija AM signala može biti:
  - sinhrona – važi za sve tipove AM signala, kombinacija kvocijentnog modulatora i filtra
  - asinhrona – sa detektorom anvelope, i može se primijeniti za modulirane signale koji u sebi sadrže nosilac.

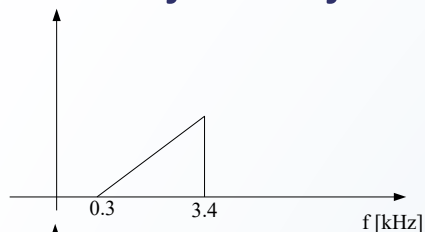
# PRENOS MULTIPLEKSNIH SIGNALA

Multipleks – sistem prenosa kojim se vrši istovremeni prenos više različitih poruka. Postoji više vrsta multipleksnog prenosa, jedan od njih je **multipleks sa frekvencijskom raspodjelom kanala**.

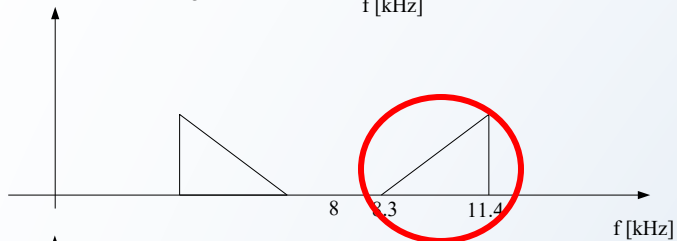


Slika: Principna šema multipleksa sa  $n$  kanala

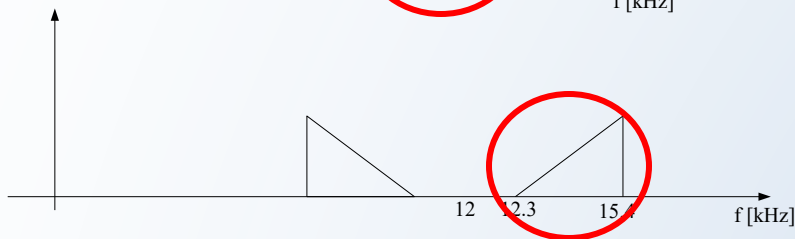
Na svaki od  $n$  kanala se dovodi signal koji se moduliše modulacijom tipa AM-1BO. Spektar svakog od ovih signala se translira u odgovarajući položaj, tako da na mjestu njihovog sabiranja ne dolazi do preklapanja spektara.



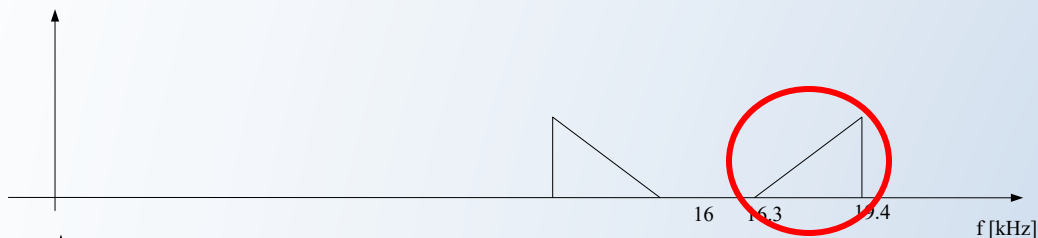
Signal  $u(t)$  u osnovnom opsegu ( $u(t)$ )



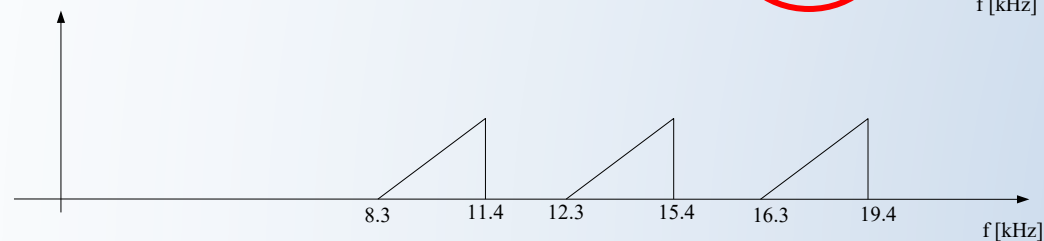
Signal  $u(t)$  pomjeren za  $f_1 = 8$  kHz



Signal  $u(t)$  pomjeren za  $f_2 = 12$  kHz



Signal  $u(t)$  pomjeren za  $f_3 = 16$  kHz



Multipleksni signal

Postoje dva načina multipleksiranja:

1. Direktna modulacija
2. Predgrupna modulacija

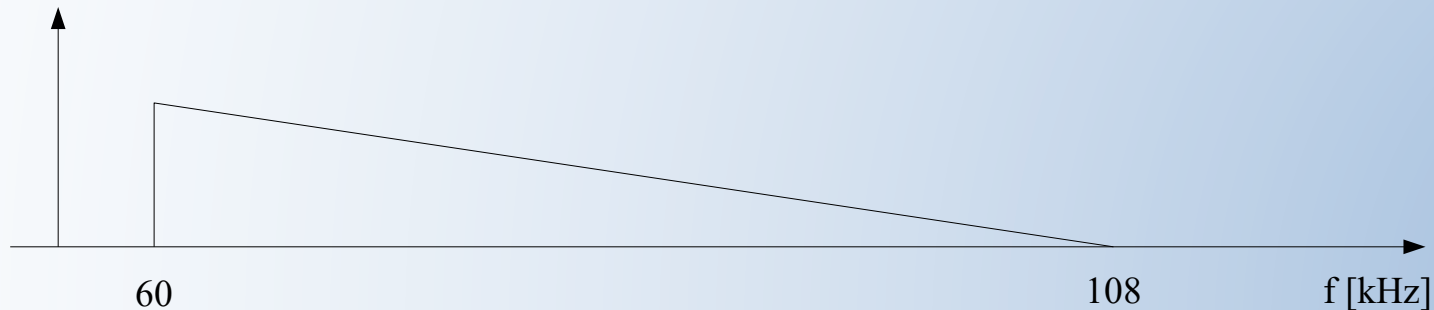
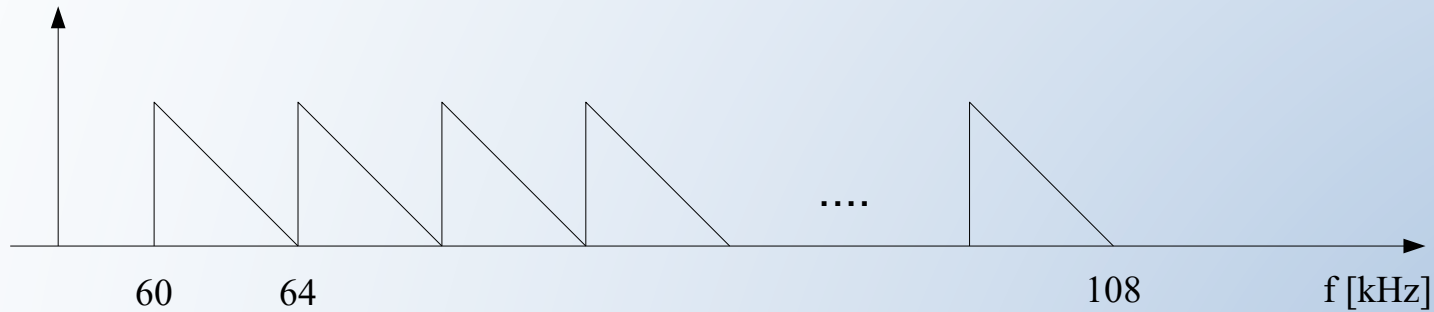
### 1. Direktna modulacija

Multipleks se sastoji od 12 kanala. Signali u svakom od kanala se posebno modulišu i za svaki kanal je potreban poseban filter koji izdvaja donji bočni opseg, kao i nosilac na različitoj učestanosti.

Učestanosti za koje se vrši translacija su:  $f_1=64\text{kHz}$ , ...  $f_n=108\text{kHz}$ .

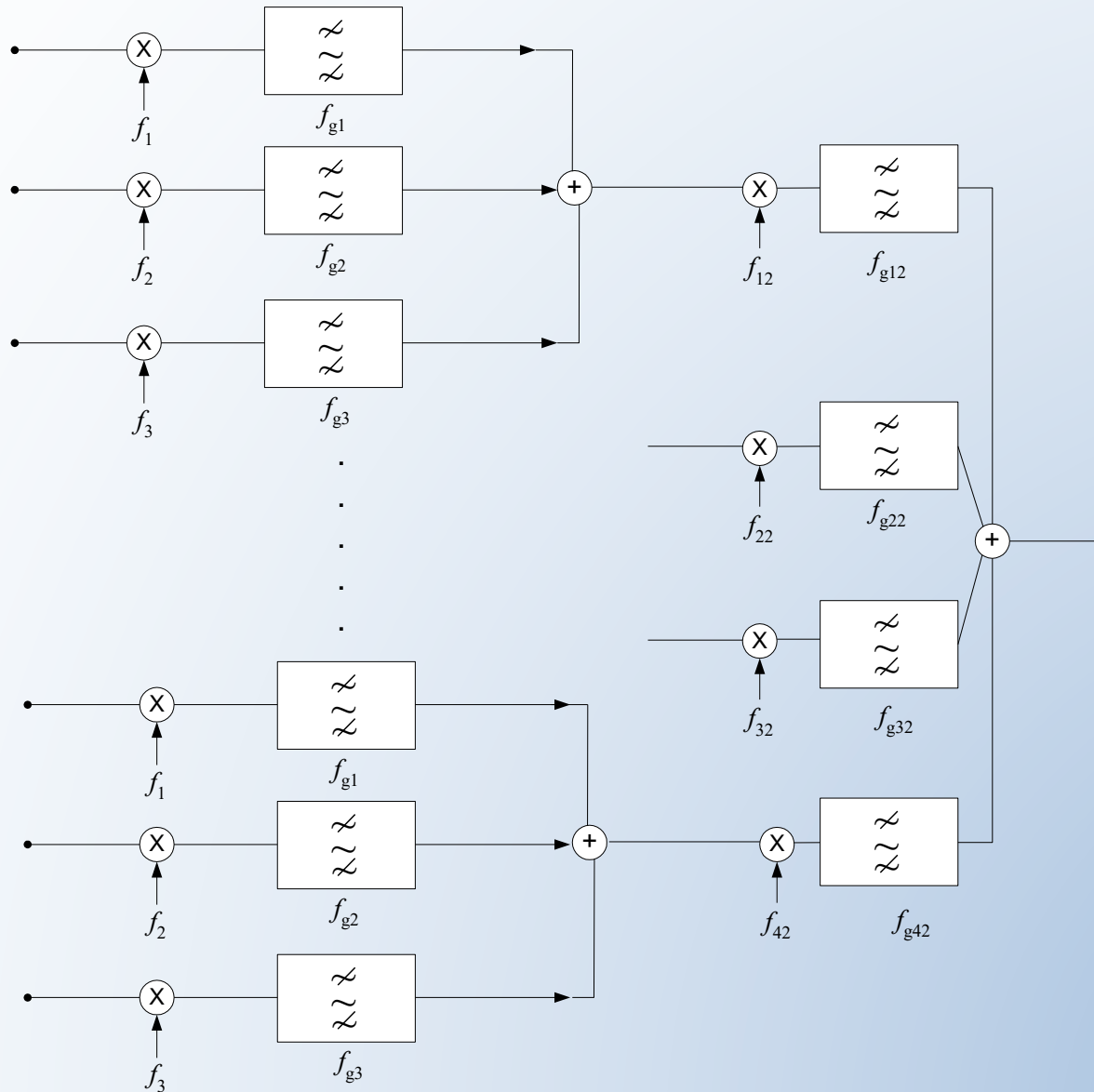
Riječ je o govornom (telefonskom) signalu, a nosioci su pomjereni za po 4kHz.

Opseg koji zauzima ovakav multipleksni signal je  $f=(60, 108)$  kHz.



## 2. Predgrupna modulacija

Podrazumijeva modulisanje predgrupa.



Vrši se grupisanje po tri kanala, koji se modulišu kao jedna predgrupa. U drugom koraku imamo translacije ovih grupa na različite nosioce.

Sistem sa 12 kanala u ovom slučaju koristi 7 različitih nosilaca i 7 različitih filtara. Filtri vrše izdvajanje gornjeg ili donjeg bočnog opsega.

Učestanosti su:

$$f_1=12\text{kHz}, f_2=16\text{kHz}, f_3=20\text{kHz}$$

$$f_{12}=84\text{kHz}, f_{22}=96\text{kHz}, f_{32}=108\text{kHz}, f_{42}=120\text{kHz}$$

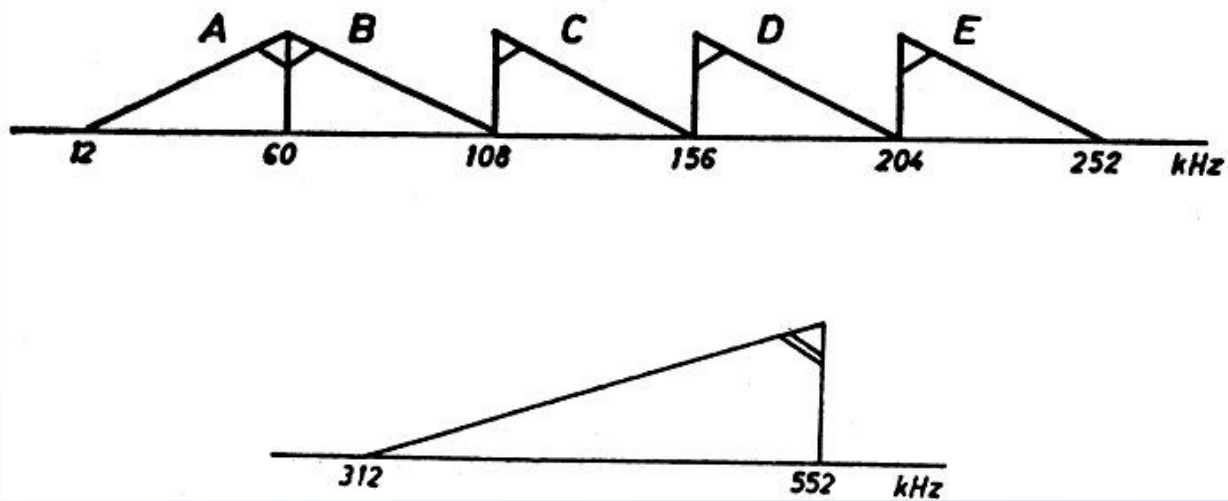
$$f_{g1}=(12.3-15.4)\text{kHz}, f_{g2}=(16.3-19.4)\text{kHz}, f_{g3}=(20.3-23.4)\text{kHz}$$

$$f_{g12}=(60-72)\text{kHz}, f_{g22}=(72-84)\text{kHz}, f_{g32}=(84-96)\text{kHz}, f_{g42}=(96-108)\text{kHz}$$

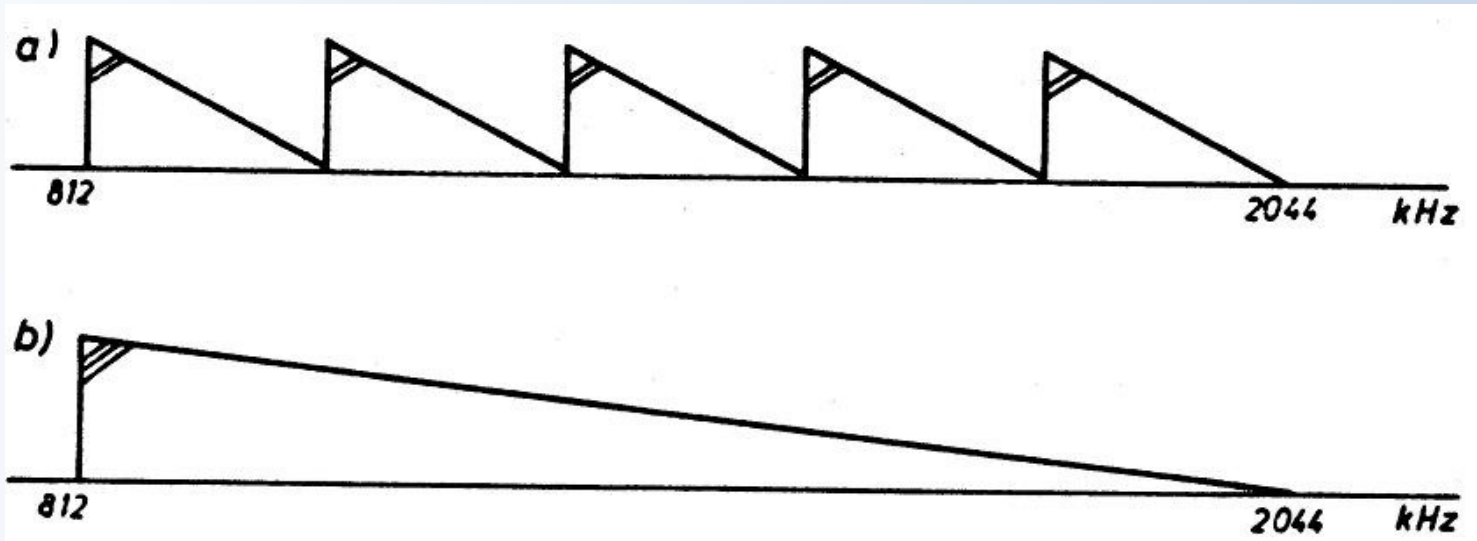
Jasno je da je i ovdje opseg izlaznog (multipleksnog) signala (60-108)kHz.

- U analognoj telefoniji ovakav multipleksni signal se naziva primarna grupa B.
- Pet primarnih grupa čine sekundarnu sa  $5 \cdot 12 = 60$  kanala u opsegu (12-252)kHz
- Pet sekundarnih grupa čine tercijarnu  $5 \cdot 60 = 300$  kanala u opsegu (812-2044)kHz
- Tri ovakve tercijarne grupe čine kvaternarnu  $3 \cdot 300 = 900$  kanala u opsegu (8156-12388)kHz

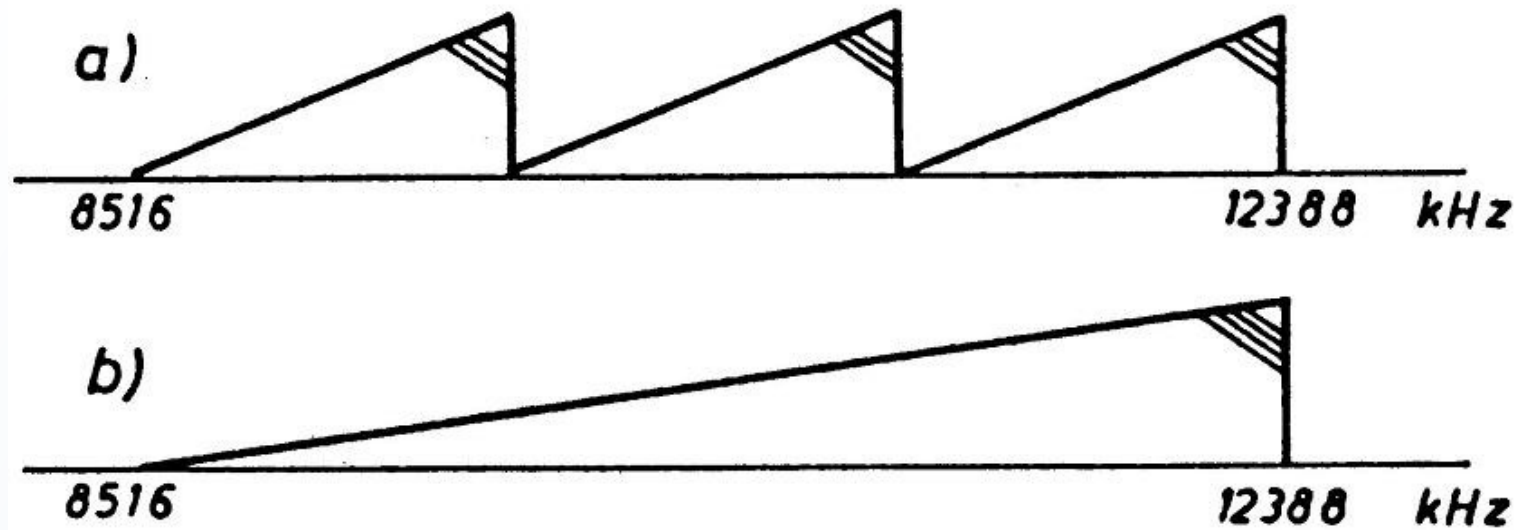




*Slika: Osnovna sekundarna grupa od 60 kanala*



*Slika: Pet sekundarnih grupa a) obrazuju terciarnu b) od 300 kanala*

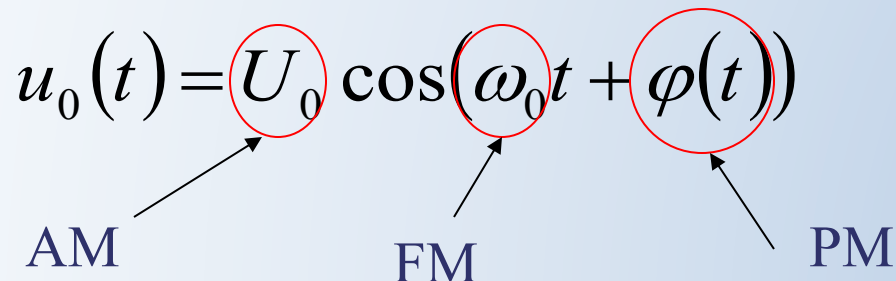


*Slika: Tri tercijarne grupe a) obrazuju kvaternarnu grupu b) koja ima 900 kanala*

# UGAONA MODULACIJA

- Ugaona modulacija spada u nelinearne postupke modulacije
- Dobijeni modulirani signal je kontinualan
- Kao i u slučaju amplitudske modulacije, nosilac ima sinusoidalni talasni oblik
- Osnovni parametri nosioca su amplituda i ugao
- U postupku **amplitudske** modulacije **amplituda** nosioca je modifikovana u zavisnosti od modulišućeg signala, a ugao ostaje nepromijenjen.
- U postupku ugaone modulacije amplituda nosioca ostaje nepromijenjena, a njegov ugao se modifikuje modulišućim signalom i postaje karakterističan parametar u kome je sadržana prenošena poruka.

Nosilac:

$$u_0(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$$


AM                      FM                      PM

Ako fazu učinimo direktno zavisnom od modulišućeg signala:

$$\varphi = \varphi(t) = \gamma [u_m(t)]$$

Opšti izraz za ugaono modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] = U_0 \cos \{\omega_0 t + \gamma [u_m(t)]\}$$

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \gamma [u_m(t)] = \Phi_0 + \gamma [u_m(t)] = \Phi_i$$

naziva se **trenutna faza**.

Veličina:

$$\varphi(t) = \gamma [u_m(t)] = \delta \Phi_i$$

koja predstavlja odstupanje trenutne faze  $\Phi_i$  od vrijednosti  $\Phi_0 = \omega_0 t$  zove se **trenutna devijacija faze**.

Izvod trenutne faze  $\Phi_i = \Phi(t)$  po vremenu:

$$\omega_i = \frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

naziva se **trenutna kružna učestanost** ugaono modulisanog signala.

Odstupanje trenutne kružne učestanosti  $\omega_i$  od kružne učestanosti nosioca  $\omega_0$ :

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_i - \omega_0 = \delta\omega_i$$

**trenutna devijacija kružne učestanosti** ugaono modulisanog signala.

*Trenutna učestanost* ugaono modulisanog signala je:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \omega_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Odstupanje trenutne učestanosti  $f_i$  od učestanosti nosioca  $f_0$ :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f_i - f_0 = \delta f_i$$

naziva se ***trenutna devijacija učestanosti***.

Preko navedenih veličina možemo da definišemo da li je riječ o faznoj ili frekvencijskoj modulaciji:

1. Ako je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***faznoj modulaciji*** ( $\Phi$ M, PM).
2. Ako je trenutna devijacija učestanost proporcionalna modulišućem signalu, riječ je o ***frekvencijskoj modulaciji*** (FM).

# FAZNA I FREKVENCIJSKA MODULACIJA

1. Fazno modulirani signal je onaj čija je trenutna devijacija faze proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta \Phi_i = \varphi(t) = k_\varphi u_m(t), \quad k_\varphi = \text{const.}$$

Modulišujući signal  $u_m(t)$  je:

$$u_m(t) = U_m m(t)$$

$$U_m = |u_m(t)|_{\max}$$

Vremensku promjenu modulišućeg signala  $u_m(t)$  karakteriše normalizovana funkcija  $m(t)$  koja zadovoljava uslov da je  $|m(t)| < 1$ ,  $|m(t)|_{\max} = 1$ . Stoga je:

$$|\delta \Phi_i|_{\max} = |\varphi(t)|_{\max} = k_\varphi |u_m(t)|_{\max} = k_\varphi |U_m m(t)|_{\max} = k_\varphi U_m = \Delta \Phi_0$$

Veličina  $\Delta \Phi_0$  naziva se **maksimalna devijacija faze** ili **devijacija faze**.

$$\Phi_i = \Phi(t) = \omega_0 t + k_\varphi u_m(t) = \omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)$$

Konačno, izraz za fazno modulisan signal glasi:

$$u(t) = U_0 \cos \Phi(t) = U_0 \cos [\omega_0 t + k_\varphi u_m(t)] = U_0 \cos [\omega_0 t + \Delta \Phi_0 m(t)]$$



2. Frekvencijski modulisan signal je onaj čija je trenutna devijacija učestanosti proporcionalna modulišućem signalu.

$$\delta f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_f u_m(t); \quad k_f = \text{const.}$$

**Maksimalna devijacija učestanosti**, ili često samo **devijacija učestanosti** biće:

$$|\delta f_i|_{\max} = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_f |u_m(t)|_{\max} = k_f |U_m m(t)|_{\max} = k_f U_m = \Delta f_0$$

Ako je riječ o kružnoj učestanosti, trenutna devijacija kružne učestanosti je:

$$\delta\omega_i = \frac{d\varphi(t)}{dt} = k_\omega u_m(t); \quad k_\omega = 2\pi k_f = \text{const.}$$

Veličina

$$|\delta\omega_i|_{\max} = \left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right|_{\max} = k_\omega |u_m(t)|_{\max} = k_\omega |U_m m(t)|_{\max} = k_\omega U_m = \Delta\omega_0$$

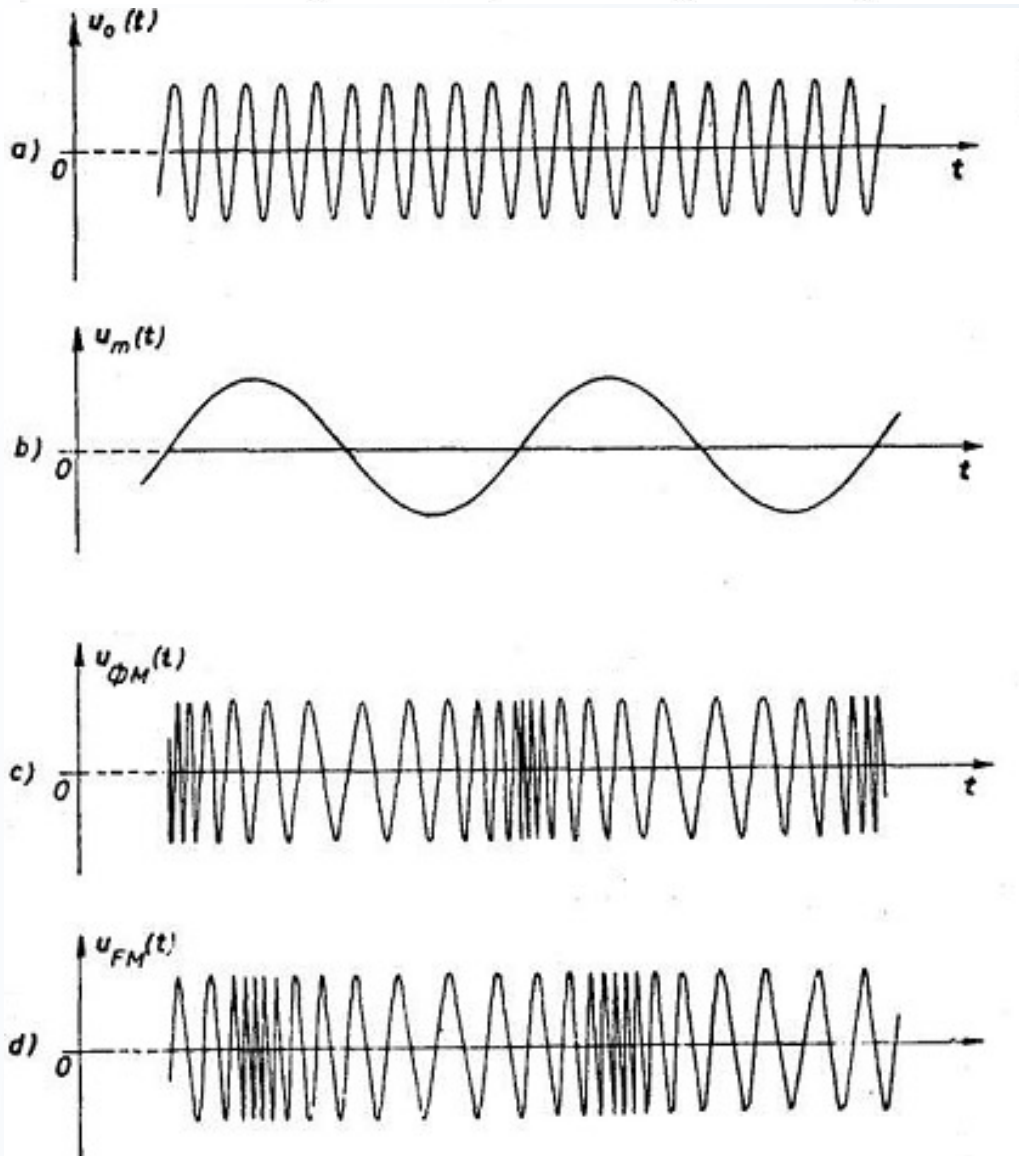
naziva se **maksimalna devijacija kružne učestanosti** ili **devijacija kružne učestanosti**.

Trenutna kružna učestanost je:

$$\omega_i = \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega_0 + k_\omega u_m(t) = \omega_0 + k_\omega U_m m(t) = \omega_0 + \Delta\omega_0 m(t)$$

Sada je izraz za frekvencijski modulisani signal:

$$u(t) = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + k_\omega \int u_m(t) dt \right] = U_0 \cos \left[ \omega_0 t + \Delta\omega_0 \int m(t) dt \right]$$



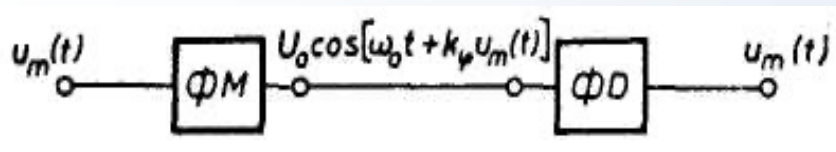
Slika: a) Nosilac; b) modulišući signal; c) fazno modulisan signal; d) frekvencijski modulisan signal

# OPŠTA VEZA IZMEĐU FAZNE I FREKVENCIJSKE MODULACIJE

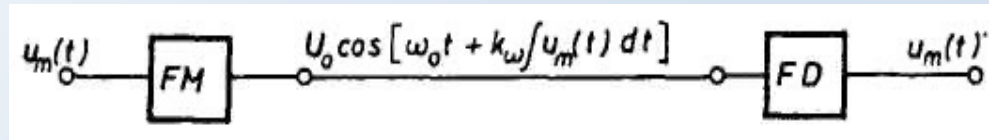
Na slici su prikazane blok-šeme sistema za prenos signala faznom i frekvencijskom modulacijom.

$\Phi M$  - fazni modulator;  $\Phi D$  - fazni demodulator

$FM$  - frekvencijski modulator;  $FD$  - frekvencijski demodulator



*Slika: Blok-šema za prenos signala faznom modulacijom*



*Slika: Blok-šema za prenos signala frekvencijskom modulacijom*

Na izlazu iz faznog modulatora trenutna devijacija faze nosioca direktno je srazmjerna modulišućem signalu, a na izlazu frekvencijskog modulatora trenutna devijacija faze nosioca proporcionalna je integralu modulišućeg signala.

Što se tiče demodulatora, fazni demodulator na svom izlazu mora dati signal direktno srazmjeran trenutnoj devijaciji faze nosioca na njegovom ulazu, dok frekvencijski demodulator daje signal direktno proporcionalan izvodu trenutne devijacije faze nosioca na svom ulazu.

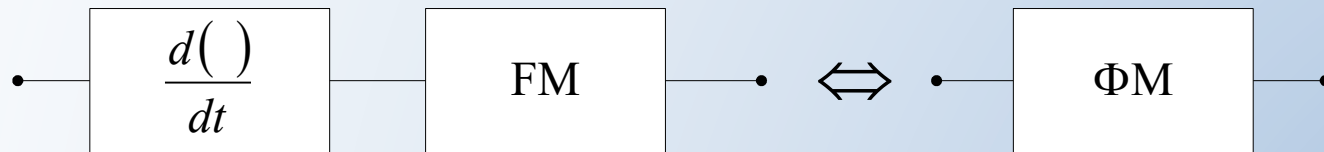
Imajući u vidu odnose između trenutne devijacije faze nosioca i prenošenog signala u modulatoru i demodulatoru, koji karakterišu opštu vezu između fazne i frekvencijske modulacije, moguće je upotrebom posebnih sklopova od faznog modulatora/ demodulatora napraviti frekvencijski i obrnuto.

1.  $\Phi M = \text{diferencijator} + F M$
2.  $\Phi D = F D + \text{integrator}$
3.  $F M = \text{integrator} + \Phi M$
4.  $F D = \Phi D + \text{diferencijator}$

1. Ako na ulaz FM modulatora dovedemo signal  $du_m(t)/dt$  izlaz iz modulatora će biti:

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\omega u_m(t)) = u_{\Phi M}(t)$$

tj.  $\Phi M$  modulator će biti kaskadna veza diferencijatora i FM modulatora.



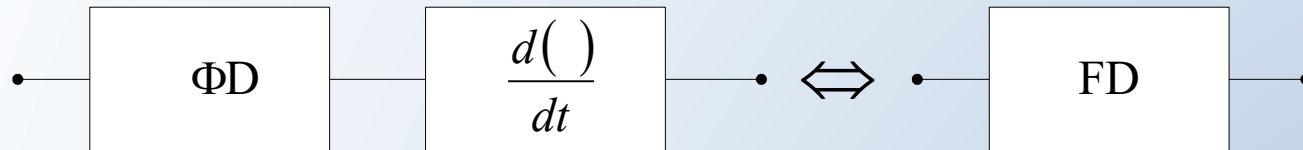
2. Demodulacija je inverzan proces:



3. Ako signal prije ulaska u  $\Phi M$  modulator prođe kroz kolo za integriranje, na izlazu sistema dobiće se modulisan signal čija je trenutna devijacija faze direktno srazmjerna integralu modulišućeg signala, a to je u stvari frekvencijski modulisani signal.



4. Demodulacija je inverzan proces:



## SPEKTAR UGAONO MODULISANIH SIGNALA

Proces amplitudske modulacije se sastoji u translaciji spektra modulišućeg signala, odnosno, svakoj komponenti iz spektra modulišućeg signala čija je učestanost  $f_m$ , u spektru AM signala odgovaraju dvije komponente simetrično smještene u odnosu na nosilac:  $f_0 + f_m$  i  $f_0 - f_m$ . Proces amplitudske modulacije je **linearan** jer važi zakon superpozicije komponenata. Bitna osobina spektra AM signala je da nema generisanja novih komponenata čije su učestanosti različite od onih koje su nastale opisanom translacijom.

Kod ugaone modulacije to nije slučaj.

- Komponente iz spektra ugaono modulisanog signala vrlo su složeno vezane za komponente modulišućeg signala.
- Spektar UM signala je, čak i u najjednostavnijem slučaju (modulišućí signal je jedna sinusoidalna funkcija), **neograničen**, tj. u procesu ugaone modulacije jedna komponenta generiše beskonačno mnogo komponenti različitih učestanosti.
- Proces ugaone modulacije je u suštini **nelinearan** i zato zakon superpozicije ne važi.



## Spektar UM signala kada je modulišući signal u obliku sinusoidalnog test tona

Pretpostavimo da je modulišući signal dat jednostavnim analitičkim izrazom:

$$u_m(t) = U_m \cos \omega_m t$$

Izraz za fazno i frekvencijski modulisan signal ovakvim modulišućim signalom je:  $u_{\Phi M}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + k_\phi U_m \cos \omega_m t)$

$$u_{FM}(t) = U_0 \cos\left(\omega_0 t + k_\omega \frac{U_m}{\omega_m} \sin \omega_m t\right)$$

Odnosno, dovoljno je razmatrati sledeći slučaj:

$$u_{UM}(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t)$$

Veličina  $m$  predstavlja maksimalnu devijaciju faze ugaono modulisanog signala, naziva se **indeks ugaone modulacije**, i za slučaj fazno modulisanog signala iznosi:

$$m = k_\phi U_m$$

a za slučaj frekvencijski modulisanog signala on je:

$$m = \frac{k_\omega U_m}{\omega_m}$$

Izraz za UM signal može da se predstavi u vidu sume prostoperiodičnih komponenti, a za to se koriste određeni identiteti iz teorije Bessel-ovih funkcija. Važi da je:

$$\sin(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin(\alpha + n\beta)$$

$$\cos(\alpha + m \sin \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos(\alpha + n\beta)$$

$$\sin(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \sin\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(\alpha + m \cos \beta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2}\right)$$

gdje je  $J_n(m)$  Bessel-ova funkcija prve vrste  $n$ -tog reda za argument  $m$ .

Sada je UM signal:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m \cos \omega_m t) = U_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m) \cos\left[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}\right]$$

Ovaj izraz može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \left\{ J_0(m) \cos \omega_0 t + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

Kako za Bessel-ove funkcije važi:

$$J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)$$

$$\cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t - n \frac{\pi}{2} \right] = (-1)^n \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right]$$

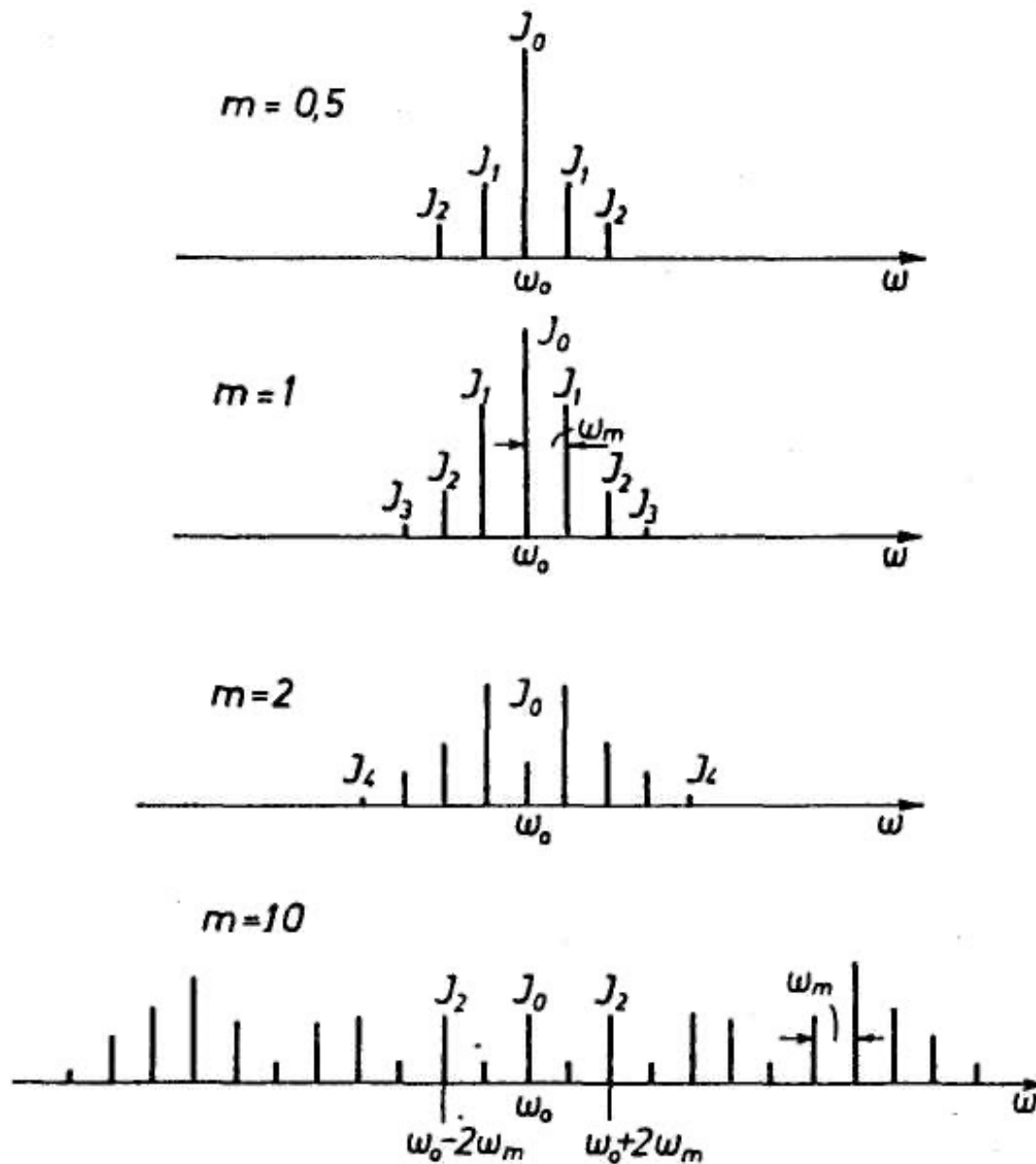
To izraz za UM signal postaje:

$$u(t) = U_0 J_0(m) \cos \omega_0 t + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \left\{ \cos \left[ (\omega_0 - n \omega_m) t + \frac{n \pi}{2} \right] + \cos \left[ (\omega_0 + n \omega_m) t + n \frac{\pi}{2} \right] \right\}$$

Za dati indeks modulacije  $m$  i za izabranu vrijednost  $n=1, 2, 3, \dots$ , Bessel-ova funkcija  $J_n(m)$  predstavlja konstantu. U izrazu koji predstavlja ugaono modulisan signal razlikujemo tri dijela:

1. Nosilac čija je amplituda  $U_0 J_0(m)$  a učestanost  $\omega_0$
2. Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 - n \omega_m) t$
3. Beskonačno mnogo komponenti oblika  $U_0 J_n(m) \cos(\omega_0 + n \omega_m) t$

Vidimo da je spektar **neograničen** i **diskretan**, a komponente se nalaze lijevo i desno od nosioca, pri čemu je razmak između dvije susjedne komponente u spektru  $\omega_m$ .



*Slika: Amplitudski spektri ugaono modulisanog signala sinusoidalnim test tonom za razne vrijednosti indeksa modulacije  $m$ .*

## Spektar UM signala kada je modulišuci signal u obliku sume dva sinusoidalna test tona

Kada je modulišuci signal suma dva sinusoidalna test tona, UM signal je oblika:

$$u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + m_1 \cos \omega_1 t + m_2 \cos \omega_2 t)$$

$m_1$  i  $m_2$  su indeksi modulacije komponenti čije su učestanosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Gornji izraz za UM signal može da se zapiše i u obliku:

$$u(t) = U_0 \cos \left[ \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) + \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) \right]$$

$$u(t) = U_0 \cos \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) \cos \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right) - \\ - U_0 \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_1 \cos \omega_1 t \right) \sin \left( \frac{\omega_0 t}{2} + m_2 \cos \omega_2 t \right)$$

Koristeći izraze za Bessel-ove funkcije, dobija se:

$$u(t) = U_0 \left[ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \right] \left[ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right] - U_0 \left[ \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \right] \left[ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q(m_2) \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \left[ \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + p \omega_1 t + p \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2} + q \omega_2 t + q \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Izraz u srednjoj zagradi predstavlja razvijeni oblik kosinusa sume dva ugla, pa je:

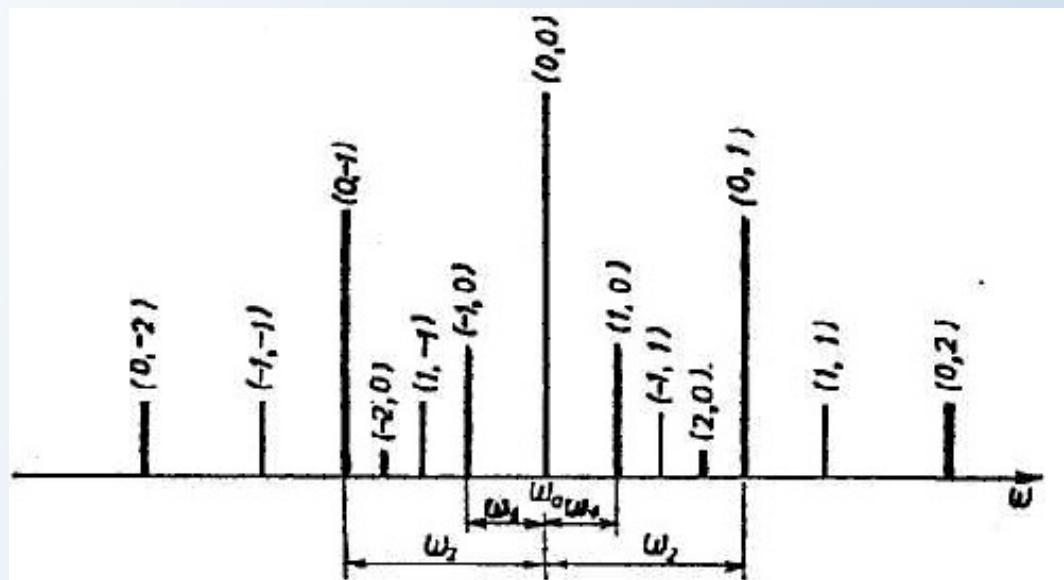
$$u(t) = U_0 \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_p(m_1) J_q(m_2) \cos \left[ (\omega_0 + p \omega_1 + q \omega_2) t + (p + q) \frac{\pi}{2} \right]$$



Spektar ovakvog ugaono modulisanog signala je diskretan.

Sve njegove komponente možemo podijeliti u četiri kategorije:

1.  $p=q=0$ , nosilac
2.  $p=0, q \neq 0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + p\omega_1$  koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida,  $m_1 \cos \omega_1 t$
3.  $p \neq 0, q=0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + q\omega_2$  koje bi se dobile kada bi u modulišućem signalu figurisala samo jedna sinusoida,  $m_2 \cos \omega_2 t$
4.  $p \neq 0, q \neq 0$ ; Komponente na učestanostima  $\omega_0 + p\omega_1 + q\omega_2$  koje predstavljaju komponente nastale uslijed međusobnog uticaja dvije sinusoida.



Slika: Amplitudski spektar ugaono modulisanog signala pri čemu je modulišući signal sastavljen od sume dva sinusoidalna test tona čije su učestanosti  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , a odgovarajući indeksi modulacije  $m_1=0,5$  i  $m_2=1$